



**POLITECHNIKA  
BYDGOSKA**  
Wydział Telekomunikacji,  
Informatyki i Elektrotechniki



Zachodniopomorski  
Uniwersytet  
Technologiczny  
w Szczecinie



Ministerstwo  
Edukacji i Nauki



advanced  
protection  
systems



## **„ELEKTROMECHATRON”**

### **II Ogólnopolska Olimpiada Elektroników i Mechatroników**

#### **Rok szkolny 2023/2024**

### **Zadania dla grupy elektronicznej na zawody III stopnia**

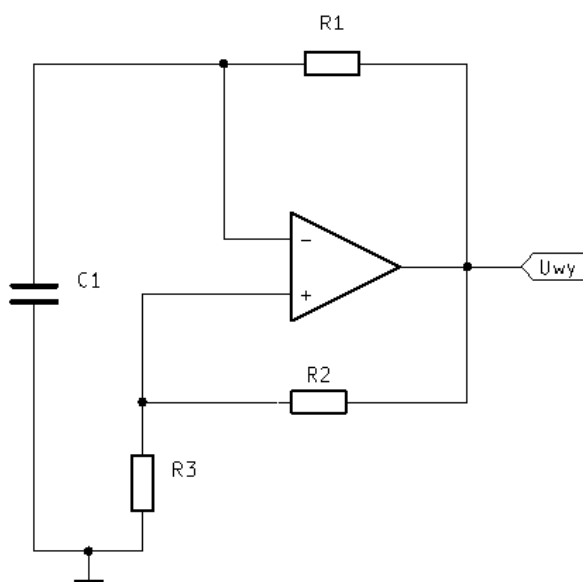
#### **Instrukcja dla zdającego**

1. Czas trwania zawodów: 120 minut.
2. III stopień Olimpiady zawiera 5 zadań otwartych.
3. Należy podać poprawną odpowiedź wraz z tokiem rozwiązania.
4. Za każdą prawidłową odpowiedź uzyskuje się maksymalnie 10 punktów. Maksymalna liczba punktów do zdobycia za 5 zadań to 50 punktów.
5. Można korzystać z przyborów do pisania, rozdawanych kart czystopisu i brudnopisu, kalkulatorów i tablic matematycznych. Korzystanie z notebooków, tabletów, telefonów komórkowych, smartfonów, smartwatchy, kalkulatorów programowalnych, itp. jest zabronione.

**Życzymy powodzenia!**

#### **Zadanie 1.**

Wyprowadź wzór na częstotliwość drgań generatora sygnału prostokątnego przedstawionego na poniższym rysunku. Zakładamy, że wzmacniacz operacyjny jest idealny i jest zasilany napięciem symetrycznym  $\pm 15$  V. Doprowadź go do najprostszej postaci.



Wskazówka: wzór określający napięcie na kondensatorze w szeregowym obwodzie RC po podaniu na niego skoku napięcia:

$$U_C = E + (U_{C0} - E)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Gdzie:  $U_{C0}$  – napięcie początkowe na kondensatorze,  $E$  – napięcie podane na wejście obwodu szeregowego RC,  $U_C$  – chwilowa wartość napięcia na kondensatorze.

**Rozwiązanie:**

Gdy napięcie na wyjściu generatora wynosi 15 V (umownie zapisujemy jako H), na wejściu nieodwracającym (+) mamy napięcie, które jest jednocześnie napięciem progowym:

$$V_{+H} = 15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (1 \text{ p})$$

Gdy napięcie na wyjściu generatora wynosi -15 V (umownie zapisujemy jako L), na wejściu nieodwracającym mamy napięcie progowe:

$$V_{+L} = -15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (1 \text{ p})$$

Są to wartości napięć do których ładuje się kondensator i po osiągnięciu których następuje przerzut napięcia na wyjściu (stąd nazwa napięcie progowe). Zakładając, że właśnie nastąpił moment przełączenia napięcia na wyjściu na 15 V, zapisujemy równanie napięcia na wejściu odwracającym, które jednocześnie jest napięciem na kondensatorze (kondensator w poprzednim stanie naładował się do wartości  $V_{+L}$  i traktujemy tą wartość jako początkową, od której zaczyna się ładowanie):

$$V_{-H} = 15 \text{ V} + (V_{+L} - 15 \text{ V}) e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \quad (1 \text{ p})$$

$$V_{-H} = 15 \text{ V} + \left( -15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - 15 \text{ V} \right) e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \quad (1 \text{ p})$$

Moment zmiany napięcia na wyjściu zajdzie wtedy, kiedy napięcia na obydwu wejściach się zrównają (napięcie na kondensatorze osiągnie wartość  $V_{+H}$ . Czas który minie do tej chwili, odpowiada połowie okresu drgań generatora. Kolejno zapisujemy:

$$15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 15 \text{ V} + \left( -15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - 15 \text{ V} \right) e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} \quad (2 \text{ p})$$

$$e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} = \frac{15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - 15 \text{ V}}{-15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - 15 \text{ V}} \quad (2 \text{ p})$$

$$-\frac{t}{R_1 C_1} = \ln \left( \frac{15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - 15 \text{ V}}{-15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - 15 \text{ V}} \right)$$

$$t = -R_1 C_1 \ln \left( \frac{15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - 15 \text{ V}}{-15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} - 15 \text{ V}} \right)$$

$$t = -R_1 C_1 \ln \left( \frac{15 \text{ V} - 15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3}}{15 \text{ V} \frac{R_3}{R_2 + R_3} + 15 \text{ V}} \right)$$

$$t = -R_1 C_1 \ln \left( \frac{15 \text{ V} \left( 1 - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)}{15 \text{ V} \left( 1 + \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)} \right)$$

$$t = -R_1 C_1 \ln \left( \frac{\left( 1 - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)}{\left( 1 + \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)} \right)$$

$$t = -R_1 C_1 \ln \left( \frac{(R_2 + R_3 - R_3)}{(R_2 + R_3 + R_3)} \right)$$

$$t = -R_1 C_1 \ln \left( \frac{R_2}{R_2 + 2R_3} \right) \quad (1 \text{ p})$$

A zatem okres wynosi:

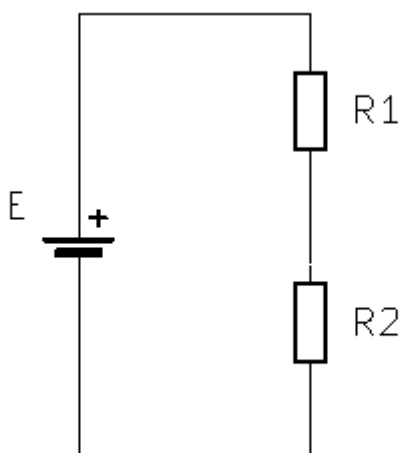
$$T = 2t = -2R_1C_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_2 + 2R_3}\right) \quad (1 \text{ p})$$

lub:

$$T = 2t = 2R_1C_1 \ln\left(1 + \frac{2R_3}{R_2}\right)$$

### Zadanie 2.

Dany jest układ złożony ze źródła napięciowego o napięciu E oraz dwóch rezystorów R1 i R2:



Oblicz dla jakiej wartości rezystora R2 moc na nim wydzielana będzie największa. Podaj wartość tej mocy.

Podpowiedź: wykorzystaj wzory na pochodne:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

### Rozwiązanie:

Napięcie na rezystorze R2 wynosi:

$$U_{R2} = E \frac{R_2}{R_2 + R_1} \quad (1 \text{ p})$$

Moc wydzielana na rezystorze R2 wynosi:

$$P_{R2} = \frac{U_{R2}^2}{R_2} = \frac{R_2^2 E^2}{R_2(R_2 + R_1)^2} = \frac{R_2 E^2}{(R_2 + R_1)^2} \quad (1 \text{ p})$$

Aby wyznaczyć dla jakiej wartości R2 moc w nim wydzielana będzie największa, obliczamy pochodną po R2, a następnie przyrównujemy ją do zera.

$$\frac{dP_{R2}}{dR_2} = \frac{E^2(R_2 + R_1)^2 - 2R_2 E^2(R_2 + R_1)}{(R_2 + R_1)^4} \quad (3 \text{ p})$$

$$\frac{E^2(R_2 + R_1)^2 - 2R_2E^2(R_2 + R_1)}{(R_2 + R_1)^4} = 0 \quad (2 \text{ p})$$

$$E^2(R_2 + R_1)^2 = 2R_2E^2(R_2 + R_1)$$

$$\frac{(R_2 + R_1)^2}{(R_2 + R_1)} = 2R_2$$

$$R_2 + R_1 = 2R_2$$

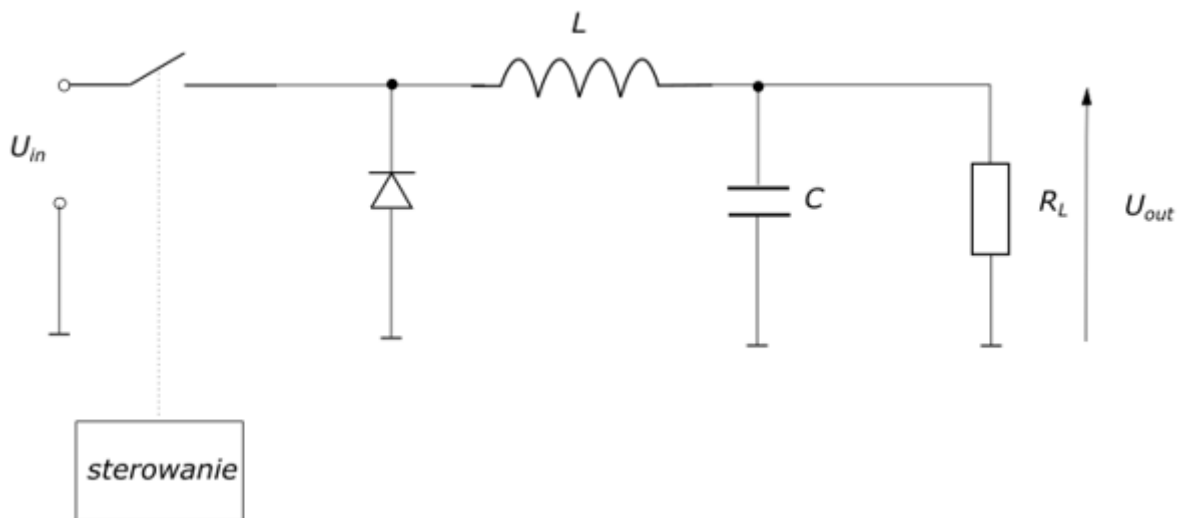
$$R_1 = R_2 \quad (2 \text{ p})$$

A zatem największa moc wydzieli się, gdy rezystory będą sobie równe. Obliczamy moc dla takiego przypadku:

$$P_{R2} = \frac{U_{R2}^2}{R_2} = \frac{R_1E^2}{(R_1 + R_1)^2} = \frac{R_1E^2}{(2R_1)^2} = \frac{R_1E^2}{4R_1^2} = \frac{E^2}{4R_1} \quad (1 \text{ p})$$

### Zadanie 3.

Wyprowadź wzór na napięcie wyjściowe (w funkcji współczynnika wypełnienia sygnału sterującego kluczem  $D = \frac{t_c}{t_c + t_o}$ , gdzie:  $t_c$ - czas, gdy klucz jest zamknięty,  $t_o$ - czas gdy klucz jest otwarty) przetwornicy obniżającej napięcie (ang. *buck converter*) przedstawionej na poniższym rysunku. Załóż, że wszystkie elementy (także dioda i klucz) są idealne.



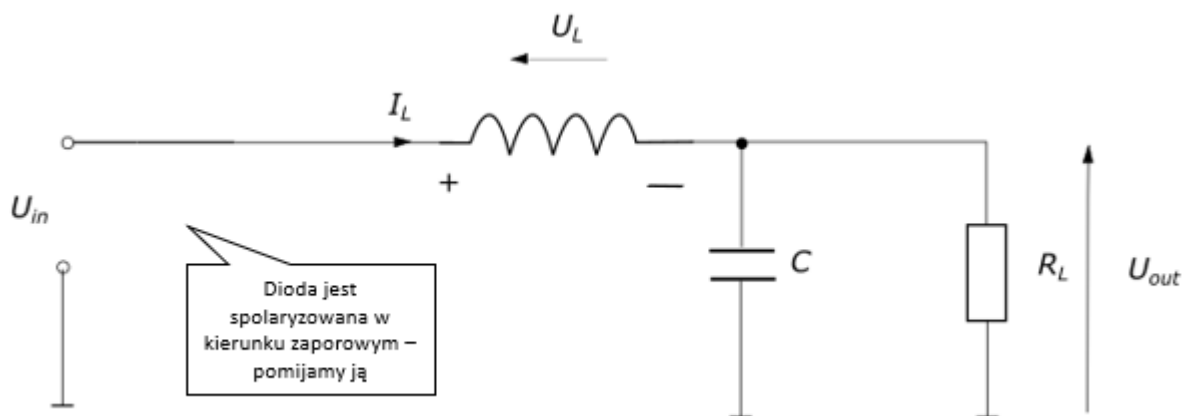
Podpowiedź: załóż, że napięcie na cewce jest równe:  $U_L = L \frac{\Delta i_L}{\Delta t}$

### Rozwiązanie:

W fazie pierwszej, w czasie  $t_c$ , gdy klucz jest zamknięty można zapisać:

$$U_L = U_{IN} - U_{OUT} \quad (1 \text{ p})$$

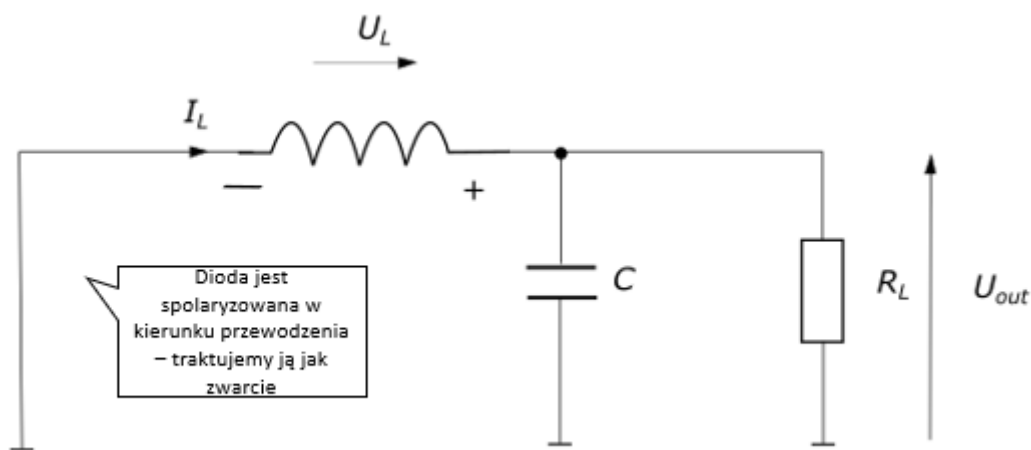
$$U_L = L \frac{\Delta i_L}{t_c} = U_{IN} - U_{OUT} \quad (1 \text{ p})$$



W fazie drugiej, w czasie  $t_o$ , gdy klucz jest otwarty można zapisać:

$$U_L = -U_{OUT} \text{ (1 p)}$$

$$\Delta i_L = -\frac{1}{L} U_{OUT} t_o \text{ (1 p)}$$



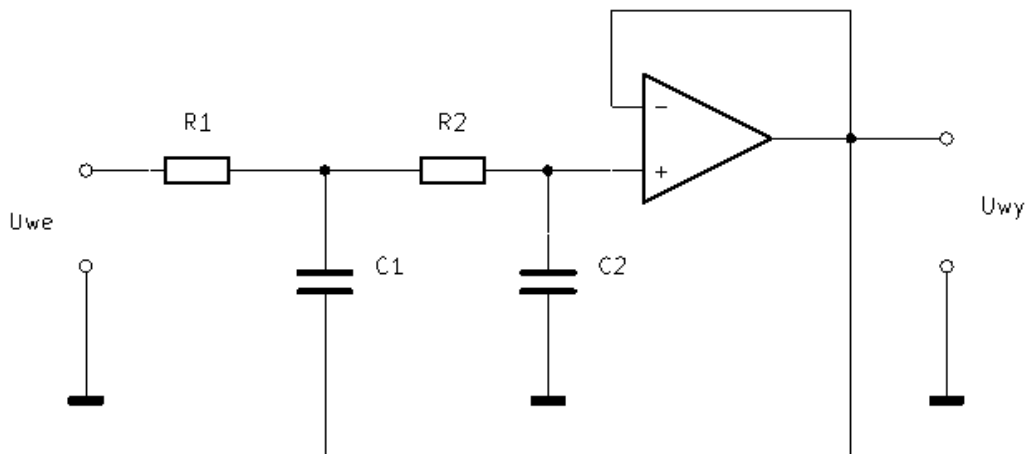
Korzystając z prawa ciągłości prądu w cewce (prawo komutacji) można zapisać:

$$\frac{1}{L} (U_{IN} - U_{OUT}) t_c = \frac{1}{L} U_{OUT} t_o \text{ (3 p)}$$

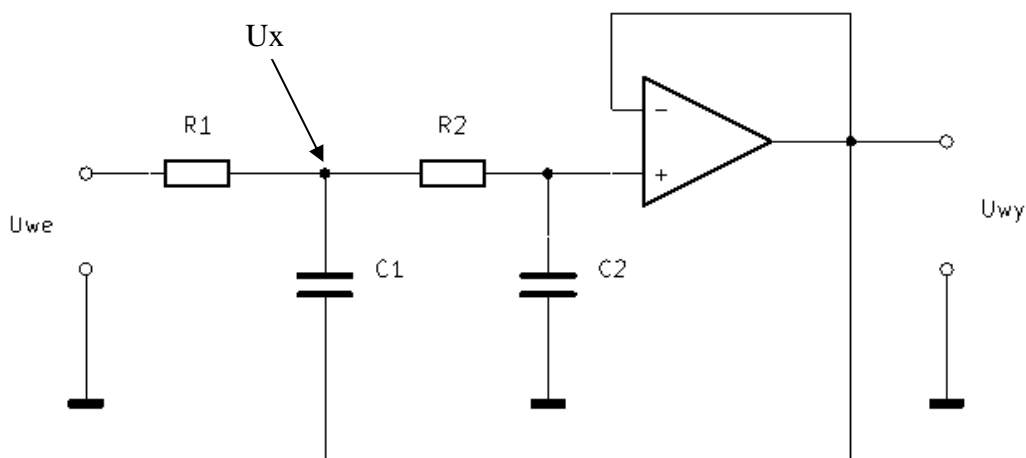
$$U_{OUT} = U_{IN} \frac{t_c}{t_c + t_o} = U_{IN} D \text{ (3 p)}$$

**Zadanie 4.**

Wyznacz transmitancję  $k(s) = \frac{U_{wy}}{U_{we}}$ ,  $s = j\omega$  poniższego układu. Załóż że wzmacniacz operacyjny jest idealny (na rysunku pominięto zasilanie).

**Rozwiązanie:**

Dla czytelności wprowadzamy napięcie  $U_x$  (mierzone względem masy).



Napięcie na wejściu nieodwracającym jest równe napięciu na wejściu odwracającym, a to z kolei napięciu wyjściowemu, zatem:

$$U_{wy} = U_x \frac{X_{C2}}{X_{C2} + R_2} = U_x \frac{\frac{1}{sC_2}}{\frac{1}{sC_2} + R_2} = U_x \frac{1}{1 + sR_2C_2} \quad (1 \text{ p})$$

$$U_x = U_{wy}(1 + sR_2C_2) \quad (1 \text{ p})$$

Korzystając z pierwszego prawa Kirchhoffa można zapisać:

$$\frac{U_{we} - U_x}{R_1} - \frac{U_x - U_{wy}}{\frac{1}{sC_1}} - \frac{U_x - U_{wy}}{R_2} = 0 \quad (1 \text{ p})$$

$$\frac{U_{we} - U_x}{R_1} = (U_x - U_{wy})(sC_1 + \frac{1}{R_2}) \quad (1 \text{ p})$$

Wstawiając wcześniejsze równanie na  $U_x$  do ostatniego otrzymujemy:

$$\frac{U_{we} - U_{wy}(1 + sR_2C_2)}{R_1} = [U_{wy}(1 + sR_2C_2) - U_{wy}] \left( sC_1 + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3 \text{ p})$$

Po przekształceniach:

$$U_{wy}(-1 - sR_2C_2) = U_{wy}(s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_2) - U_{we}$$

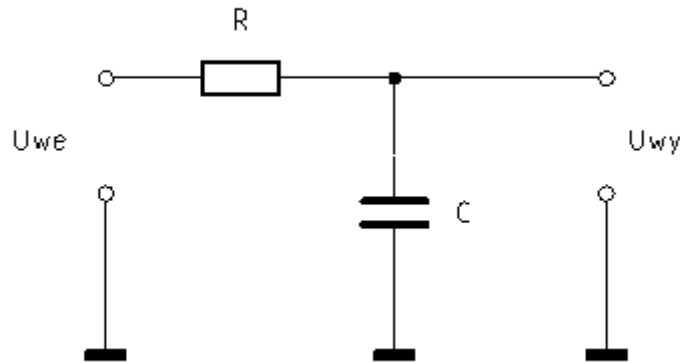
$$-1 - sR_2C_2 = s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_2 - \frac{U_{we}}{U_{wy}}$$

$$\frac{U_{we}}{U_{wy}} = s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_2 + 1 + sR_2C_2$$

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{1}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_2 + 1 + sR_2C_2} = \frac{1}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sC_2(R_1 + R_2) + 1} \quad (3 \text{ p})$$

### Zadanie 5.

Na rysunku przedstawiono najprostszy filtr dolnoprzepustowy RC.



Wyznacz jego transmitancję ( $k(s) = \frac{U_{wy}}{U_{we}}, s = j\omega$ ). Następnie stosując przekształcenie (tzw. transformację biliniową):  $s = \frac{2}{T_p} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ , przekształć ten filtr do postaci cyfrowej. Podaj jego transmitancję  $k(z) = \frac{y(z)}{x(z)}$  oraz równanie różnicowe pozwalające na wyznaczenie próbki sygnału wyjściowego  $y(n)$ . Załóż okres próbkowania  $T_p = 1$ . Podpowiedź:  $z^{-1}$  oznacza cofnięcie o jedną próbkę.

### Rozwiązanie:

Wyznaczamy transmitancję układu analogowego:

$$k(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (2 \text{ p})$$

Dokonyjemy przekształcenia na filtr cyfrowy:

$$\begin{aligned} k(z) &= \frac{1}{1 + 2RC \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1+z^{-1}}{(1+z^{-1}) + 2RC(1-z^{-1})} = \frac{1+z^{-1}}{1+z^{-1} + 2RC - 2RCz^{-1}} \\ &= \frac{1+z^{-1}}{1+z^{-1}(1-2RC) + 2RC} \quad (2 \text{ p}) \end{aligned}$$

Na podstawie transmitancji można zapisać równanie różnicowe i wyznaczyć wzór na próbkę sygnału wyjściowego:

$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1}(1 - 2RC) + 2RC}$$

$$y(z)[1 + z^{-1}(1 - 2RC) + 2RC] = x(z)[1 + z^{-1}]$$

$$y(z) + y(z)[z^{-1}(1 - 2RC)] + y(z)[2RC] = x(z) + x(z)[z^{-1}]$$

$$y(z)[1 + 2RC] + y(z)[z^{-1}(1 - 2RC)] = x(z) + x(z)[z^{-1}] \quad (3 \text{ p})$$

Przechodzimy do dziedziny czasu dyskretnego:

$$y(n)[1 + 2RC] + y(n-1)[1 - 2RC] = x(n) + x(n-1)$$

$$y(n)[1 + 2RC] = x(n) + x(n-1) - y(n-1)[1 - 2RC]$$

$$y(n) = x(n)\left[\frac{1}{1 + 2RC}\right] + x(n-1)\left[\frac{1}{1 + 2RC}\right] - y(n-1)\left[\frac{1 - 2RC}{1 + 2RC}\right] \quad (3 \text{ p})$$

<b>Opracowali:</b> Michał Raczyński	<b>Sprawdził:</b> Krzysztof Bolesta	<b>Zatwierdził:</b> Przewodniczący Rady Naukowej Olimpiady
--	--	---